

רציפות:

עצם מוחשי נע אינו יכול להעלם בנקודה מסוימת ולצוץ שוב, בנקודה אחרת, כשהוא ממשיך בתנועתו. לכן אנו רואים את מסלול של עצם נע כעקומה לא-מקוטעת שניתן לשרטטה במשיכת קולמוס אחת. עקומות כאלה נוכל לתאר כ"רציפות". אנו ניתן ביטוי מתמטי לרעיון האינטואיטיבי הזה ונחשוף תכונות אחדות של עקומות רציפות.

הגדרה 1: רציפות של פונקציה בנקודה אחת:

פונקציה f תקרא רציפה בנקודה x_0 אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $f_{(x_0)}$ מוגדר.

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{(x)}$ קיים.

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{(x)} = f_{(x_0)}$.

- במילים אחרות: תהי x נקודה כל שהיא בסביבת הנקודה x_0 ונסמן: $\Delta x = x - x_0$. אזי $x = \Delta x + x_0$. ולכן $f_{(x)} = f_{(x_0 + \Delta x)}$. ברור כי x שואף ל- x_0 אם ורק אם הגודל Δx שואף לאפס. לכן נוכל לנסח מחדש את הגדרת הרציפות באופן הבא:

$f_{(x)}$ רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f_{(x_0 + \Delta x)} = f_{(x_0)}$. הגודל Δx נקרא התוספת לנקודה x_0 .

- אם אפילו אחד מן התנאים שבהגדרה אינו מתקיים נאמר ש- f אינה רציפה ב- x_0 ונקרא ל- x_0 נקודת אי-רציפות של f . אם f רציפה בכל הנקודות שבקטע (a, b) נאמר ש- f רציפה ב- (a, b) , פונקציה רציפה ב- $(-\infty, +\infty)$ תיקרא פונקציה רציפה בכל מקום או בקיצור פונקציה רציפה.

משפט 1:

פולינומים הם פונקציות רציפות.

משפט 2:

אם $f_{(x)}$ היא פונקציה אלמנטארית אז $f_{(x)}$ רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרת.

משפט 3:

יהיו $f_{(x)}$, $g_{(x)}$ פונקציות רציפות בנקודה x_0 אזי:

א. לכל קבוע C . $Cf_{(x)}$ רציפה בנקודה x_0 .

ב. $f_{(x)} \pm g_{(x)}$ רציפה בנקודה x_0 .

ג. $f_{(x)} \cdot g_{(x)}$ רציפה בנקודה x_0 .

ד. אם $g_{(x_0)} \neq 0$ אז $\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}$ רציפה בנקודה x_0 .

משפט 4: רציפות של פונקציות רציונאליות:

פונקציה רציונאלית רציפה בכל מקום, חוץ מאשר בנקודות שבהן המכנה הוא אפס.

משפט 5: רציפות של הרכבה:

הסימון \lim להלן מייצג אחד מן הגבולות: $\lim_{x \rightarrow -\infty}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$, $\lim_{x \rightarrow x_0}$.

- אם $\lim_{x \rightarrow x_0} g_{(x)} = L$ ואם הפונקציה $f_{(x)}$ רציפה ב- L אז $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g_{(x)}) = f(L)$ כלומר

במילים: הגבול של f של g שווה ל- f של הגבול של g . $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g_{(x)}) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g_{(x)})$.

משפט 6:

אם פונקציה g רציפה בנקודה x_0 והפונקציה f רציפה בנקודה $g_{(x_0)}$, אז ההרכבה $f \circ g$ רציפה ב- x_0 .

רציפות מימין ורציפות משמאל:

הגדרה 2:

א. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בחצי סביבה ימנית $[x_0, r)$ של הנקודה x_0 . נאמר כי $f(x)$ רציפה מימין

בנקודה x_0 אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ קיים הגבול הימני-}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

ב. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בחצי סביבה שמאלית $(r, x_0]$ של הנקודה x_0 . נאמר כי $f(x)$ רציפה

משמאל בנקודה x_0 אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ קיים הגבול-}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

משפט 7:

אם $f(x)$ מוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה x_0 אזי $f(x)$ רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם $f(x)$ רציפה משמאל ורציפה מימין בנקודה זו.

רציפות בתחום:

הגדרה 3:

תהי $f(x)$ פונקציה נתונה:

א. נאמר כי $f(x)$ רציפה בקטע פתוח (a, b) אם $f(x)$ רציפה בכל נקודה $a < x < b$

ב. $f(x)$ רציפה בקטע החצי-פתוח $[a, b)$ אם $f(x)$ רציפה בכל נקודה $a < x < b$ ורציפה מצד ימין בנקודה a .

ג. $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a, b]$ אם $f(x)$ רציפה בכל נקודה $a < x < b$ רציפה מצד ימין בנקודה a , ורציפה בצד שמאל בנקודה b .

ד. באופן דומה נגדיר את הרציפות של $f(x)$ בקטעים מן הצורה: $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$, (a, ∞) , $(-\infty, b]$.

$$(-\infty, +\infty), (-\infty, b]$$

משפט 8: (משפט ערך-הביניים):

אם f רציפה בקטע סגור $[a, b]$ ו- C הוא מספר כלשהוא בין $f(a)$ ל- $f(b)$ לרבות שני ערכים אלו ת אז קיים

לפחות מספר אחד x בקטע $[a, b]$ כך ש- $f(x) = C$.

משפט 9:

אם f רציפה בקטע $[a, b]$ ואם ל- $f(a)$ ול- $f(b)$ סימנים מנוגדים, אז למשוואה $f(x) = 0$ יש לפחות פתרון אחד

בקטע (a, b) .

סוגי אי רציפויות:

-- אי רציפות שניתן להתגבר עליה נקראת סליקה (שניתן לסלקה)

-- אי רציפות שלא ניתן להתגבר עליה נקראת בלתי סליקה / לא סליקה.

הגדרה 4:

תהי $f_{(x)}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x = x_0$ פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. נאמר כי x_0 היא נקודת אי-רציפות סליקה אם:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{(x)} \text{ קיים הגבול}$$

ב. $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{(x)} \neq f_{(x_0)}$ או שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה x_0 .

הגדרה 5:

נקודה $x = x_0$ נקראת נקודת אי-רציפות ממין ראשון (בלתי סליקה- קפיצה סופית) של הפונקציה $f_{(x)}$:

א. $f_{(x)}$ מוגדרת בסביבה מסוימת של $x = x_0$ פרט אולי לנקודה x_0 עצמה.

ב. קיימים הגבולות החד צדדים (והם סופים) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_{(x)}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_{(x)}$

$$\text{ג. } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_{(x)} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f_{(x)}$$

הגדרה 6:

נקודה x_0 נקרא נקודת אי רציפות ממין שני (בלתי סליקה- קפיצה אינסופית) של הפונקציה $f_{(x)}$ אם:

א. $f_{(x)}$ מוגדרת בסביבת הנקודה x_0 פרט אולי ל- x_0 עצמה.

ב. לפחות אחד מן הגבולות החד צדדים בנקודה x_0 אינו קיים.

משפט 10:

אם $f_{(x)}$ היא פונקציה מונוטונית בסביבת הנקודה $x = x_0$, ואם $f_{(x)}$ אינה רציפה בנקודה זו. אזי x_0 היא נקודת אי רציפות ממין ראשון.

משפטי הרציפות היסודיים

משפט 1:

יהיו $f : (a_1, b_1) \rightarrow (a_2, b_2)$ $g : (a_2, b_2) \rightarrow (a_3, b_3)$ שתי פונקציות רציפות. אזי הפונקציה המורכבת $f \circ g : (a_1, b_1) \rightarrow (a_3, b_3)$ רציפה גם היא. במילים אחרות: הרכבה של שתי פונקציות היא פונקציה רציפה.

משפט 2: (ערך הביניים)

תהי $f_{(x)}$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$ אם $f_{(a)} \cdot f_{(b)}$ (כלומר $f_{(x)}$ מקבלת ערכים בעלי סימנים נגדיים בקצות הקטע אזי קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש- $f_{(c)} = 0$).

משפט 3: (ערך הביניים של קושי / ערך הביניים המוכלל)

תהי $f_{(x)}$ רציפה בקטע $a \leq x \leq b$ אם y_0 היא נקודת הביניים בין $f_{(a)}$ ל- $f_{(b)}$ כלומר $f_{(a)} < y_0 < f_{(b)}$ (או $f_{(b)} < y_0 < f_{(a)}$) אזי קיימת נקודה x_0 השייכת לקטע $a < x < b$ כך ש- $f_{(x_0)} = y_0$.

משפט 4: (המשפט הראשון של ויארשטראס)

תהי $f_{(x)}$ פונקציה רציפה בקטע סופי סגור $[a, b]$ אזי $f_{(x)}$ חסומה בקטע זה.

משפט 5: (המשפט השני של ויארשטראס)

תהי $f_{(x)}$ פונקציה רציפה בקטע סופי סגור $[a, b]$ אזי $f_{(x)}$ מקבלת בקטע זה את המינימום ואת המקסימום שלה כלומר קיימת נקודה \bar{x} בקטע כל ש- $f_{(\bar{x})} \leq f_{(x)}$ לכל $a \leq x \leq b$. וקיימת נקודה \bar{x} כך ש- $f_{(x)} \leq f_{(\bar{x})}$ לכל $a \leq x \leq b$.

משפט 6:

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית אזי $f_{(x)}$ רציפה אם ורק אם התמונה שלה היא קטע סגור.

משפט 7:

אם $f_{(x)}$ פונקציה רציפה ומונוטונית עולה ממש (או יורדת ממש) בקטע $[a, b]$ אזי $f_{(x)}$ הפיכה והפונקציה ההפוכה לה רציפה ומונוטונית גם היא.

משפט 8:

תהי $f_{(x)}$ פונקציה מונוטונית עולה ממש (או יורדת ממש) בקטע הפתוח (a, b) כולל האפשרות ש: $a = -\infty$ או $b = \infty$ אזי $f_{(x)}$ הפיכה והפונקציה ההפוכה לה רציפה גם היא.

משפט 9:

אם רציפה והפיכה בקטע אזי היא חייבת להיות מונוטונית עולה ממש או מונוטונית יורדת ממש בקטע זה.

רציפות במידה שווה:

הגדרה:

תהי $f_{(x)}$ פונקציה המוגדרת מעל התחום D נאמר כי $f_{(x)}$ רציפה במידה שווה בתחום אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש:-

$$\forall x_1, x_2 \in D: |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f_{(x_1)} - f_{(x_2)}| < \varepsilon$$

- לכל שתי פונקציות x_1, x_2 בתחום D , אם המרחק ביניהם קטן מ- δ אז המרחק בין $f_{(x_1)}$ ל- $f_{(x_2)}$ קטן מ- ε .

משפט 1:

אם $f_{(x)}$ רציפה במידה שווה בתחום D אזי היא רציפה בתחום זה.

משפט 2: (cantor)

פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$ רציפה בו במידה שווה.