מושגים בפונקציות

הגדרה:

פונקציה היא שלשה המורכבת מ-:

- קבוצה הנקראת **התחום** של הפונקציה
- קבוצה הנקראת **הטווח** של הפונקציה
- התאמה , המתאימה **לכל** איבר בתחום איבר **אחד ויחיד** של הטווח.

תהי קבוצה $D=\{-3,2,3,5,9\}$ ותהי R קבוצת המספרים הממשיים .

לכל x ב- D נתאים את x^2 איבר של R.

פעולת ההעלאה בריבוע מגדירה התאמה ,המתאימה למספר 2 שב- D את המספר 4 שב- R , ולמספר 5 את המספר 25 שב- R . באופן כללי , לכל איבר של D מותאם איבר **אחד ויחיד** של R .

שתי הקבוצות D ו R , יחד עם ההתאמה המתאימה לכל $x\in D$ את המספר $x^2\in R$, מכונות בשם **פונקציה.**

הקבוצה D נקראת **התחום** של הפונקציה הנידונה.

והקבוצה R נקראת **הטווח** של הפונקציה הנידונה .

באמצעות הפונקציה מותאם , לכל איבר x בתחום, איבר אחד ויחיד מן הטווח .

האיבר המותאם ל- x מכונה **התמונה** של x לפי הפונקציה .

סימון פונקציה :

בדרך כלל מסמנים פונקציות באותיות לטיניות קטנות כגון : f,g,h . אם x הוא איבר כלשהו בתחום של פונקציה f מסמנים את תמונתו בסימון $f_{(x)}$.

עוד סימון מקובל לפונקציה הוא :

$f:D\to R$ כאשר התחום הוא D ו - R הוא הטווח בצורה הזו נוסף גם בדרך כלל גם כלל ההתאמה

לדוגמא במקרה הנ"ל הוא $f_{(x)}=x^2$ ואז רושמים כך: $f:D\to R$

$$f_{(x)}=x^2$$

פונקציה חד-חד-ערכית:

פונקציה f היא **חד-חד-ערכית** אם כל איבר בתמונה של f הוא התמונה של איבר יחיד בתחום של f .

-- פונקציה היא חד-חד-ערכית , אם לאיברים שונים בתחומה יש תמונות שונות.

-- f היא חד-חד-ערכית אם מתקיים התנאי , שלכל x ו- y בתחום , שעבורם $x\neq y$, מתקיים גם $f_{(x)}\neq f_{(y)}$. $\Leftarrow$ f היא פונקציה חד-חד-ערכית ,אם מן השוויון $f_{(x)}=f_{(y)}$ נובע השוויון $x=y$.

פונקציה על:

פונקציה $f:A\to B$ היא **פונקציה על** B , אם התמונה של f שווה לטווח של f כלומר אם $f(A)=B$ (במילים " f של A שווה ל- B).

פונקציה זוגית ואי זוגית:

תהי $f_{(x)}$ פונקציה בעלת תחום הגדרה D סימטרי ביחס לראשית הצירים כלומר:

$$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ x\in D\Leftrightarrow -x\in D$$

נאמר שהפונקציה $f_{(x)}$ **זוגית** מעל D אם

$$\forall\, x\in D\ :\ f_{(-x)}=f_{(x)}$$

נאמר שהפונקציה $f_{(x)}$ **אי-זוגית** מעל D אם

$$\forall x \in D : f_{(-x)} = -f_{(x)}$$

- הגרף של פונקציה **זוגית** סימטרי ביחס לציר ה-y
- הגרף של פונקציה **אי-זוגית** סימטרי לראשית הצירים.

פונקציה מונוטונית :

יהי D תחום ההגדרה של הפונקציה $f_{(x)}$ ויהי $D_0 \subseteq D$ תת-תחום של D.

נאמר ש-$f_{(x)}$ היא **מונוטונית עולה** בתחום D_0 אם :

$$\forall x_1, x_2 \in D_0 : x_1 \le x_2 \Rightarrow f_{(x_1)} \le f_{(x_2)}$$

נאמר ש-$f_{(x)}$ היא **מונוטונית יורדת** בתחום D_0 אם :

$$\forall x_1, x_2 \in D_0 : x_1 \le x_2 \Rightarrow f_{(x_1)} \ge f_{(x_2)}$$

נאמר ש-$f_{(x)}$ **היא מונוטונית עולה ממש** בתחום D_0 אם :

$$\forall x_1, x_2 \in D_0 : x_1 < x_2 \Rightarrow f_{(x_1)} < f_{(x_2)}$$

נאמר ש-$f_{(x)}$ **היא מונוטונית יורדת ממש** בתחום D_0 אם :

$$\forall x_1, x_2 \in D_0 : x_1 < x_2 \Rightarrow f_{(x_1)} > f_{(x_2)}$$

נאמר כי $f_{(x)}$ **מונוטונית** אם היא מקימת את אחד התנאים הנ"ל.

פונקציה הפוכה:

הפונקציה $f : D \to E$ נאמר כי $f_{(x)}$ היא פונקציה מ-D על E אם לכל $y \in E$ קיים $x \in D$ כך ש-$y = f_{(x)}$

אם f היא פונקציה מ- D על E אז נסמן זאת על-ידי $f : D \to E$ אם בנוסף לכך f היא חד-חד-ערכית אז נסמן זאת על-ידי $f : D \xrightarrow{1-1} E$ במקרה זה אפשר להגדיר פונקציה $g : E \to D$ על-ידי $g_{(y)} = x$ אם ורק אם $f_{(x)} = y$ כלומר הפונקציה g פועלת באופן הפוך לפעולה של f , והא נקראת **הפונקציה ההפוכה** של f , ומסומנת על-ידי f^{-1} . יש לציין שוב שהפונקציה ההפוכה של f קיימת רק כאשר f היא פונקציה חד-חד-ערכית מ-D על E . התחום של f^{-1} יהיה אז E והטווח יהיה D.

מן ההגדרה של f^{-1} נובע:

$$\forall x \in D : f^{-1}\left(f_{(x)}\right) = x$$

$$\forall y \in E : f\left(f^{-1}{}_{(y)}\right) = y$$

פעולות אלמנטאריות בין פונקציות :

הפעולות האלמנטאריות בין פונקציות הם : סכום , הפרש, מכפלה , מנה והרכבה.

בהינתן שתי פונקציות f ו- g הסכום - $f+g$, ההפרש $f-g$, המכפלה $f \cdot g$ והמנה $\frac{f}{g}$ מוגדרים על –ידי:

א. **הסכום** -- $(f+g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$

ב. **ההפרש** -- $(f-g)_{(x)} = f_{(x)} - g_{(x)}$

ג. **המכפלה** -- $(f \cdot g)_{(x)} = f_{(x)} \cdot g_{(x)}$

ד. **המנה** -- $\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} \Leftrightarrow g_{(x)} \ne 0$

הרכבה של פונקציה: אם f ו- g הן שתי פונקציות ממשיות , כך שתמונת f מוכלת בתחום של g , אז הפונקציה , שתחומה הוא התחום של f ,המוגדרת על-ידי ההתאמה המתאימה. לכל x בתחום של f את $g(f_{(x)})$ נקראת **ההרכבה של** g על f . את ההרכבה של g על f נסמן ב- $g \circ f$ לכל x בתחום של f מתקיים $g \circ f_{(x)} = g(f_{(x)})$.

פונקציה אלמנטארית:

פונקציה המתקבלת מהפונקציות:

_ c, x, $\sin x$, a^x, $\arcsin x$, $\log_a x$, $(0 < a \neq 1)$ ע"י סדרה סופית של פעולות אלמנטאריות