משפטים בסדרות של מספרים ממשיים וגבולותהים

משפט 1:

אם סדרה מתכנסת אזי יש לה גבול אחד ויחיד . במילים אחרות סדרה אינה יכולה להתכנס לשני גבולות.

משפט 2 :

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

משפט 3 :

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

אזי

א.לכל קבוע c , $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = cA$.

ב. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$.

ג. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) = AB$.

ד. אם בנוסף לנתונים הנ"ל לכל $n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$, $B \neq 0$ אזי

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$$

משפט 4 :

אם הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה ואם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי הסדרה $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת

ו- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.

משפט 5 :

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת לגבול L ויהי b מספר נתון אז קיים n_0 כך שלכל

$n \geq n_0$, $a_n \geq b$ אזי $L \geq b$.

משפט 6 : (**כלל הסנדביץ'**)

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, ו- $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ שלוש סדרות . אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ ואם קיים n_0 כך שלכל

$n \geq n_0$, $a_n \leq b_n \leq c_n$ אזי גם הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L.

משפט 7:

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים חיובים , אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ אזי הסדרה $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת

ומתקיים השוויון $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=1}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

משפט 8: (**התכנסות במובן הרחב**)

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ו- $a_n \neq 0$, לכל n , אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$.

<u>משפט 9 :</u> (**גבול של סדרות מונוטוניות**)
כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת .
מסקנה:
סדרה מונוטונית עולה וחסומה מתכנסת לסופרמום שלה
סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מתכנסת לאינפימום שלה

<u>משפט 10:</u>
כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב .
מסקנה:
סדרה מונוטונית עולה ולא חסומה מתכנסת לאינסוף.
סדרה מונוטונית יורדת ולא חסומה מתכנסת למינוס אינסוף.

<u>משפט 11:</u>
תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה , ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת , ונניח שמתקיים
א. לכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \le b_n$.
ב. $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.
אזי שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול.

<u>משפט 12 :</u> (**הלמה של Cantor**)
תהי $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קטעים סגורים כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$
$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. אזי קיימת נקודה **אחת בלבד** c כך ש- $c \in [a_n, b_n]$, לכל $n \in \mathbb{N}$.

<u>משפט 13:</u> (**המספר e**)
הסדרה $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ מתכנסת לגבול שנקרא לו e . בנוסף לכך $2 < e \le 3$.

<u>משפט 14 :</u> (**תתי-סדרות**)
אם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (כולל במובן הרחב) אזי כל תת-סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול.

<u>משפט 15 :</u>
תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת לכל n, $a_n \ne 0$ וכך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
אזי $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e$, ו- $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{a_n})^{a_n} = \frac{1}{e}$.

<u>משפט 16:</u>
אם לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיימות שתי תתי-סדרות המתכנסות לגבולות שונים (גם במובן הרחב), אזי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת.

<u>משפט 17:</u>
סדרה מונוטונית $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת $\Leftrightarrow$ יש לה לפחות תת- סדרה אחת מתכנסת.

משפט 18:
לכל סדרה מתכנסת יש תת-סדרה מונוטונית .

משפט 19: (**Bolzano-Weierstrass**)
לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.
לכל סדרה חסומה יש לפחות גבול חלקי אחד.
מסקנה:
לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב . לכן לכל סדרה יש גבול חלקי במובן הרחב.

משפט 20:
סדרה מתכנסת במובן הרחב $\Leftrightarrow$ יש לה בדיוק גבול חלקי אחד.

משפט 21:
לכל סדרה חסומה קיים הגבול החלקי הקטן ביותר וקיים הגבול החלקי הגדול ביותר.

משפט 22:
יהי A הגבול התחתון של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\bar{A}$ הגבול העליון של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אזי לכל $\varepsilon > 0$, הקטע
$(\underline{A}-\varepsilon\ ,\ \bar{A}+\varepsilon)$ מכיל כמעט את על אברי הסדרה.
כלומר קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $\underline{A}-\varepsilon < a_n < \bar{A}+\varepsilon$.

משפט 23:
סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

משפט 24:
יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות של מספרים ממשים . אזי
א. $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$.
ב. $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$.
אם בנוסף $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, לכל $n \in \mathbb{N}$, אזי גם
ג. $(\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n)(\underline{\lim_{n\to\infty}} b_n) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n b_n) \leq (\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n)(\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n)$.
ד. $(\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n)(\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n b_n) \leq (\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n)(\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n)$.

משפט 25: (**Cauchy**)
סדרת מספרים ממשיים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כך שלכל $m, n \geq n_0$
מתקיים $|a_m - a_n| < \varepsilon$. התנאי האחרון נקרא **הקריטריון של קושי** .

<u>משפט 26 :</u> (קריטריון קושי)

סדרת מספרים ממשים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ ולכל $p \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$.

רישום ע"י סימנים לוגיים:

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} : \left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$

אם נשלול את שני הצדדים שבפסוק זה נקבל קריטריון להתבדרות בסדרה

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall n_0, \exists n \geq n_0, \exists p \in \mathbb{N} : \left|a_{n+p} - a_n\right| \geq \varepsilon$

במילים הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת $\Leftrightarrow$ קיים $\varepsilon > 0$, כך שלכל מספר טבעי n_0, קיים $n \geq n_0$ וקיים מספר טבעי p כך ש- $\left|a_{n+p} - a_n\right| \geq \varepsilon$

<u>משפט 27:</u>

תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי , ותהי $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ממש ולא חסומה . אם קיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$