גבולות של פונקציות

הגדרה 1: הגדרה לפי היינה :

תהי $f_{(x)}$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, פרט אולי לנקודה a עצמה.

מספר ממשי $L\in\mathbb{R}$ יקרא **הגבול** של $f_{(x)}$ כאשר x שואף לנקודה a , אם **לכל** סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לגבול a יש $x_0\neq a$ הסדרה $\{f_{(x)}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L . $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n\to a} f_{(x)}=L$.

– תהי פונקציה מוגדרת בחצי ישר ימני (a,∞) מספר ממשי $L\in\mathbb{R}$ יקרא הגבול של $f_{(x)}$ כאשר x **שואף לאינסוף** אם לכל סדרה $x_n\to\infty$, הסדרה $\{f_{(x_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L. $\Leftarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_{(x)}=L$.

– אם יש סדרה $x_n\to\infty$ אבל $f_{(x_n)}$ מתבדרת אז ל- $f_{(x)}$ אין גבול כאשר $x_n\to a$.

הגדרה 2 : הגדרה לפי קושי:

תהי $f_{(x)}$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, פרט אולי לנקודה a עצמה.

מספר ממשי $L\in\mathbb{R}$ יקרא הגבול של $f_{(x)}$ כאשר x שואף לנקודה a $(x\neq a)$ אם לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|f_x-L|<\varepsilon$ בסימנים לוגיים :

$$\lim_{n\to a} f_{(x)}=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f_{(x)}-L|<\varepsilon$$

חישוב גבולות:

* **אריתמטיקה של גבולות: משפט 1:**

הסמל $\lim$ כאן מייצג כל אחד מהגבולות --- $\lim\limits_{x\to a},\lim\limits_{x\to a^-},\lim\limits_{x\to a^+},\lim\limits_{x\to+\infty},\lim\limits_{x\to-\infty}$.

אם קיימים שני גבולות $\lim f_{(x)}=A$ ו- $\lim g_{(x)}=B$ אז-

א. $\lim\left[f_{(x)}+g_{(x)}\right]=\lim f_{(x)}+\lim g_{(x)}=A+B$

הגבול של סכום הוא סכום הגבולות

ב. $\lim\left[f_{(x)}-g_{(x)}\right]=\lim f_{(x)}-\lim g_{(x)}=A-B$

הגבול של הפרש הוא הפרש הגבולות

ג. $\lim\left[f_{(x)}g_{(x)}\right]=\lim f_{(x)}\cdot\lim g_{(x)}=A\cdot B$

הגבול של מכפלה הוא מכפלת הגבולות

ד. $\lim\dfrac{f_{(x)}}{g_{(x)}}=\dfrac{\lim f_{(x)}}{\lim g_{(x)}}=\dfrac{A}{B}$ בתנאי ש- $B\neq0$

הגבול של המנה הוא מנת הגבולות בתנאי שגבול המכנה שונה מאפס.

ה. $\lim\sqrt[n]{f_{(x)}}=\sqrt[n]{\lim f_{(x)}}=\sqrt[n]{A}$ בתנאי ש- $A\geq0$ כאשר n זוגי

הגבול של שורש n -י הוא השורש ה- n -י של הגבול בתנאי ששורש זה קיים .

- הטענות א ו- ג ת המנוסחות לגבי שתי פונקציות f ו- g , תקפות לכל מספר סופי של פונקציות :

כלומר אם : $\lim f_{1(x)},\lim f_{2(x)},.....,\lim f_{n(x)}$ קיימים כולם אז:

1. $\lim\left[f_{1(x)}+f_{2(x)}+...+f_{n(x)}\right]=\lim f_{1(x)}+\lim f_{2(x)}+...+\lim f_{n(x)}$

2. $\lim\left[f_{1(x)}\cdot f_{2(x)}\cdot\ldots\cdot f_{n(x)}\right]=\lim f_{1(x)}\cdot\lim f_{2(x)}\cdot\ldots\cdot\lim f_{n(x)}$

אם $f_1.....f_n$ הן כולן אותה פונקציה ניתן לרשום את (2) כך :

3. $\lim\left[f_{(x)}\right]^n=\left[\lim f_{(x)}\right]^n$

מ-(3) נקבל את התוצאה השימושית:

4. $\lim_{x\to a}x^n=\left[\lim_{x\to a}x\right]^n=a^n$

תוצאה שימושית נוספת שנובעת מחלק ג' של האריתמטיקה של גבולות במקרה מיוחד שבו אחד הגורמים הוא קבוע k :

5. $\lim kf_{(x)}=\lim k\lim f_{(x)}=k\lim f_{(x)}$

שוויון בין שני הביטויים הקיצוניים ב-(5) משמעו: שאפשר להוציא גורם קבוע מחוץ לסימן הגבול.

* **<u>משפט 2 : כלל הסנדביץ'.</u>**

יהיו $h_{(x)},g_{(x)},f_{(x)}$ שלוש פונקציות המוגדרות בסביבה מסוימת של הנקודה $x=a$ פרט אולי לנקודה a עצמה. נניח כי לכל x בסביבה זו מתקיים $f_{(x)}\le g_{(x)}\le h_{(x)}$ ונניח כי קיימים הגבולות $\lim_{x\to a}f_{(x)}=\lim_{x\to a}h_{(x)}=A$ אזי $\lim_{x\to a}g_{(x)}=A$.

* **משפט 3:**

יהיו $f_{(x)}$ ו- $g_{(x)}$ פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה a פרט אולי ל- a עצמה.

אם $f_{(x)}$ חסומה בסביבה זו ואם $\lim_{x\to a}g_{(x)}=0$ אזי $\lim_{x\to a}f_{(x)}g_{(x)}=0$.

* **<u>משפט 4:</u>**

אם לפונקציה $f_{(x)}$ קיים הגבול $\lim_{x\to a}f_{(x)}$ אזי הוא יחיד !.

שיטות להוכחת אי קיום גבול :

א. אם קיימות שתי סדרות שונות $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסות לגבול a אך הסדרות $\left\{f_{(x_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{f_{(y_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לגבולות שונים אז לא קיים הגבול של $f_{(x)}$ בנקודה $x=a$.

ב. אם קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול a אך הסדרה $\left\{f_{(x_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת כלל , אזי שוב לא קיים הגבול של $f_{(x)}$ בנקודה $x=a$

<u>הגדרה 3 / לפי קושי :</u>

נאמר כי המספר הממשי $L\in\mathbb{R}$ הוא גבול של פונקציה $f_{(x)}$ כאשר x שואף לאינסוף אם לכל $\varepsilon>0$ קיים E כך שלכל x המקיים $x>E$ מתקיים $\left|f_{(x)}-L\right|<\varepsilon$ בסימנים לוגים:

$$\lim_{x\to\infty}f_{(x)}=L\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists E,\forall x:x>E\Rightarrow\left|f_{(x)}-L\right|<\varepsilon$$

* **<u>משפט 5:</u>**

הגדרת הגבול של קושי שקולה להגדרת הגבול של היינה

* **<u>משפט 6</u>**:

תהי $f_{(x)}$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$ פרט אולי לנקודה a עצמה.

אם קיים הגבול $\lim_{x\to a}f_{(x)}=L$ אזי קיימת סביבה מסוימת של a אשר בה $f_{(x)}$ חסומה .

*** משפט 7:**

תהי $f_{(x)}$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$, ונניח כי קיים הגבול $\lim\limits_{x\to a} f_{(x)}=L\neq 0$ אזי:

א. אם $L>0$ אזי קיימת סביבה מסוימת של a כך שלכל x בסביבה זו (פרט אולי ל- a) מתקיים $f_{(x)}>0$.

ב. אם $L<0$ אזי קיימת סביבה מסוימת של a כך שלכל x בסביבה זו (פרט אולי ל- a) מתקיים $f_{(x)}<0$.

גבול במובן הרחב-הגדרה 4 :

תהי $f_{(x)}$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x=a$ פרט אולי לנקודה a עצמה. נאמר כי הגבול של $f_{(x)}$ בנקודה $x=a$ הוא אינסופי (או לחילופין $f_{(x)}$ שואפת לאינסוף כאשר x שואף ל- a) אם לכל מספר ממשי $M>0$ (גדול ככל שיהיה) קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $f_{(x)}>M$. בסימנים לוגיים:

$$\lim_{x\to a} f_{(x)}=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x-a|<\delta \Rightarrow f_{(x)}>M$$

הגדרה 5:

תהי $f_{(x)}$ פונקציה המוגדרת על חצי ישר ימני . נאמר כי הגבול של $f_{(x)}$ הוא אינסופי כאשר x שואף לאינסוף (או לחילופין $f_{(x)}$ שואפת לאינסוף כאשר x שואף לאינסוף) אם לכל מספר ממשי $M>0$ (גדול ככל שיהיה) קיים $D>0$ כל שלכל $x>D$ מתקיים $f_{(x)}>M$ בסימנים לוגיים:

$$\lim_{x\to \infty} f_{(x)}=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists D>0,\forall x:x>D \Rightarrow f_{(x)}>M.$$

חישוב של פונקציות אלמנטאריות- משפט 8:

תהי $f_{(x)}$ פונקציה אלמנטארית המוגדרת בנקודה $x=x_0$ אזי: $\lim\limits_{x\to x_0} f_{(x)}=f_{(x_0)}$

(אם $f_{(x)}$ מוגדרת מצד אחד של x_0 אז הגבול הוא חד-צדדי)

הגדרה 6 גבולות חד-צדדים:

תהי $f_{(x)}$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה $x=a$ כלומר קיים $r>a$ כך ש- $f_{(x)}$ המוגדרת בקטע (a,r). מספר ממשי $L\in\mathbb{R}$ הוא הגבול הימני של $f_{(x)}$ כאשר x שואף לנקודה a. מצד ימין (ותמיד $x>a$) אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שמתקיים:

$$\forall x:a<x<a+\delta \Rightarrow \left|f_{(x)}-L\right|<\varepsilon \text{ נסמן } \lim_{x\to a^+} f_{(x)}=L,$$

באותו אופן אם $f_{(x)}$ מוגדרת בסביבה השמאלית (r,a) מספר ממשי $L\in\mathbb{R}$ הוא הגבול השמאלי של $f_{(x)}$ כאשר x שואף לנקודה a. אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שמתקיים:

$$\forall x:a-\delta<x<a \Rightarrow \left|f_{(x)}-L\right|<\varepsilon \quad \text{ נסמן } \lim_{x\to a^-} f_{(x)}=L$$

הפונקציה אינה חייבת להיות מוגדרת בנקודה $x\le a$ בכדי שהגבול הימני יתקיים (אותו דבר לגבי השמאלי).

*** משפט 9:**

לפונקציה $f_{(x)}$ קיים גבול בנקודה $x=a$ אם ורק אם קיימים הגבולות החד-צדדיים בנקודה ושלושת הגבולות שווים :

$$L=\lim_{x\to a^+} f_{(x)}=\lim_{x\to a^-} f_{(x)}=\lim_{x\to a} f_{(x)}$$

מסקנה:

אם הגבולות החד-צדדיים בנקודה הנתונה קיימים ושונים , אזי לא קיים הגבול של הפונקציה באותה נקודה.

*** משפט 10:**

אם $f_{(x)}$ פונקציה מונוטונית בסביבת הנקודה x_0, אזי קיימים הגבול השמאלי $L^-=\lim\limits_{x\to x_0^-} f_{(x)}$ והגבול הימני $L^+=\lim\limits_{x\to x_0^+} f_{(x)}$ אם $f_{(x)}$ מונוטונית עולה אז $L^-\le L^+$, ואם $f_{(x)}$ מונוטונית יורדת אז $L^+\le L^-$.